1.3.1 Početní příklady - rovnoměrný pohyb

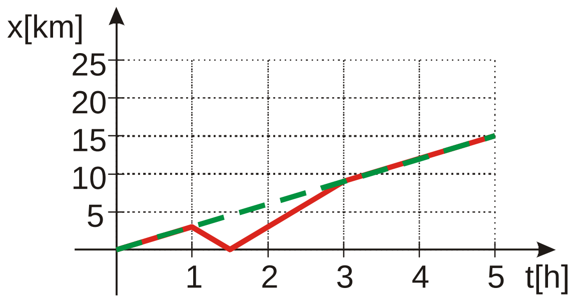
Předpoklady: 010112

Pedagogická poznámka: Do následujících hodin před vlastním pohybem po kružnici jsou přesunuty příklady na rovnoměrný a rovnoměrně zrychlený pohyb, které vyžadují úpravy rovnic a práci s neznámými. V této době už by žáci měli mít probránu úvodní kapitolu matematiky a s ní úpravy výrazů a vyjadřování ze vzorce. Matematika by tak neměla být zásadní překážkou, která jim brání v úspěšném řešení příkladů. Pokud přesto nebudou schopni příklady matematicky zvládnout, doporučuji hodiny přeskočit a přiměřeně ořezat i následující hodiny o kruhovém pohybu (vyřadit příklady, ve kterých se využívá celá soustava rovnic a dosazuje se z jedné rovnice do druhé). Na druhé straně je potřeba (bez ohledu na úroveň matematiky) dosáhnout toho, aby vyjadřování z běžných vzorců žákům problémy nečinilo a žáci kvůli potížím s vyjadřováním neměli pocit, že jim nejde fyzika.

Pedagogická poznámka: Přesun na toto místo byl zvolen kromě ohledů na výuku matematiky i kvůli tomu, aby si žáci zopakovali rovnice pro pohyby a lépe pak přijali analogii přímočarého pohybu s pohybem po kružnici.

Pedagogická poznámka: Cílem hodiny je nácvik využití matematického formalismu, proto není uvedeno řešení příkladů různými druhy úvah, které matematický formalismus do různé míry obcházejí. Pokud někdo s takovým řešením přijde, zaslouží pochvalu, ale přesto by měl využití matematiky zkusit. Hledání takových řešení je pak docela pěkný dobrovolný domácí úkol.

Př. 1: Turista vyrazil na výlet do vedlejšího města pomalou chůzí 3 km/h. Po hodině chůze si vzpomněl, že zapomněl peněženku, a začal se rychle rychlostí 6 km/h vracet zpět. Doma popadl peněženku a pospíchal v původním směru stále rychlostí 6 km/h, dokud se mu nepodařilo dohnat původní ztrátu.
Nakresli do jednoho obrázku graf jeho pohybu i graf pohybu, který by platil, pokud by nezapomněl peněženku a šel stále stejnou rychlostí. Z grafu zjisti, za jak dlouho by dohnal ztrátu, a odhad ověř výpočtem.



Zelená přerušovaná čára: pohyb turisty, který si nic nezapomněl. Jde stále rychlostí 3 km/h a za pět hodin ujde 15 km.
Červená čára: graf turisty, který si zapomněl peněženku. Po jedné hodině se začne vracet zpět, po půlhodině je doma a pak každou další hodinu ujde 6 km, dokud nedožene ztrátu. Pak opět zpomalí na 3 km/h.
V místě, kde se obě čáry protínají, zapomnětlivý turista dožene toho, který nic nezapomněl. Turista dožene plán po třech hodinách po začátku.

Ověření výpočtem:
Zelený turista jde tři hodiny rychlostí 3 km/h. Ujde tedy $s = vt = 3 \cdot 3\,\text{km} = 9\,\text{km}$.
Červený turista se pohybuje, jako by vyrážel v 1,5 hodině. Do okamžiku setkání jde tedy jenom 1,5 hodiny rychlostí 6 km/h. Ujde tedy $s = vt = 6 \cdot 1{,}5\,\text{km} = 9\,\text{km}$.
Obě vzdálenosti jsou stejné $\Rightarrow$ turista dožene svůj plán ve 3. hodině.

Jak bychom postupovali, kdyby se grafy neprotnuly přesně ve třetí hodině?
Ve chvíli, kdy turista dožene ztrátu, musí platit: dráha plánovaná = dráha skutečná.
$s_p = s_s$
Obě dráhy jsou dráhy rovnoměrného pohybu $\Rightarrow$ $s_p = v_p t_p$, $s_s = v_s t_s$.
$v_p t_p = v_s t_s$
Platí: $t_s = t_p - 1{,}5$ (Turista ve skutečnosti vyrazil z domova po návratu o 1,5 hodiny později, než plánoval).
Dosadíme za rychlosti: $3t_p = 6\left(t_p - 1{,}5\right)$ (dále píšeme místo t_p jenom t)
$3t = 6t - 9$
$3t = 9$
$t = 3$

Př. 2: Petr s Hankou šli společně na výlet. V Kutimovicích potkal Petr svého kamaráda a řekl sestře, aby šla dál, že ji dohoní. Kdy a kde ji dohonil, když z Kutimovic vyrazil o půl hodiny později a pospíchal rychlostí 8 km/h, zatímco sestra pokračovala pomalou chůzí 4 km/h? Příklad řeš: a) úvahou b) sestavením rovnice.

a) úvahou
Hanka vyjde z Kutimovic dříve než její bratr. Získá tak náskok, který její bratr musí dohonit. Hanka se pohybuje půl hodiny rychlostí 4 km/h $\Rightarrow$ získá náskok dva kilometry. Bratr ji dohání rychlostí 4 km/h (rozdíl rychlosti Petra a Hanky) $\Rightarrow$ náskok dožene za
$t = \frac{s}{v} = \frac{2}{4}\,\text{h} = 0{,}5\,\text{h}$.

b) pomocí rovnice
$s_H = s_P$ (oba sourozenci ve chvíli setkání urazili z Kutimovic stejnou vzdálenost)
$v_H t_H = v_P t_P$ (oba sourozenci se pohybovali rovnoměrně)
Stále máme dvě neznámé veličiny. Petr vyrazil z Kutimovic o půl hodiny později než Hanka, která tedy šla o půl hodiny déle a tak platí: $t_H = t_P + 0{,}5$, dosadíme:
$v_H\left(t_P + 0{,}5\right) = v_P t_P$ (v rovnici známe všechny členy kromě t_P, které z ní můžeme vyjádřit)
$v_H t_P + 0{,}5 v_H = v_P t_P$
$0{,}5 v_H = v_P t_P - v_H t_P$
$0{,}5 v_H = \left(v_P - v_H\right) t_P$
$t_P = \frac{0{,}5 v_H}{\left(v_P - v_H\right)}$
Provedeme kontrolu správnosti našeho řešení. Na levé straně rovnice je čas, výraz na pravé straně rovnice musí mít také význam času. A opravdu ho má, na pravé straně je zlomek, v jehož čitateli je výraz $0{,}5 v_H$, který má význam dráhy (0,5 je půlhodina Hančina náskoku), a

v jehož jmenovateli je rozdíl rychlostí, tedy zase nějaká rychlost. Podíl $\frac{s}{v}$ má opět význam času $\Rightarrow$ výsledný vztah může být správně.

$$t_P = \frac{0,5v_H}{\left(v_P - v_H\right)} = \frac{0,5 \cdot 4}{8-4}\,\mathrm{h} = 0,5\,\mathrm{h}$$

$$s_P = v_P t_P = 8 \cdot 0,5\ \mathrm{km} = 4\ \mathrm{km}$$

Petr dohnal Hanku za půl hodiny ve vzdálenosti 4 km od Kutimovic.

Dodatek: Ve skutečnosti jsme dvěma různými způsoby získali stejné výsledky. Protože čitatel zlomku $0,5v_H$ je vlastně Hančin náskok a rozdíl $v_P - v_H$ je rychlost, kterou Petr Hanku doháněl.

Poznámka: Trochu manuálnějším typem této kontroly výsledného vztahu je „rozměrová zkouška“. Do výrazu vpravo dosadíme za jednotlivé veličiny jejich jednotky. Po úpravě musí vyjít jednotky veličiny na levé straně. $\frac{0,5v_H}{\left(v_P - v_H\right)} = \frac{\mathrm{h} \cdot \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}} = \mathrm{h}$. Čas se měří v hodinách, zkouška tedy vyšla.

Poznámka: Důležité je si uvědomit, že pokud „rozměrová zkouška“ vyjde, neznamená to, že výsledek je správný. Pouze, když nevyjde, víme, že výsledek je špatně.
Rozměrovou zkoušku nemusíme provádět pouze u konečného výrazu. Můžeme ji použít i pro hledání chyby v kterémkoliv místě výpočtu. Například také v rovnici $0,5v_H = v_P t_P - v_H t_P$, musejí mít (a také mají) všechny členy stejný význam dráhy.

Dodatek: Jinak postup obecného řešení není jediný ani jednoznačný. Mohli bychom postupovat i takto:

$$s_H = s_P$$

$$v_H t_H = s_P$$

$$v_H\left(t_P + 0,5\right) = s_P$$

$$v_H\left(\frac{s_P}{v_P} + 0,5\right) = s_P$$ a nyní vyjádřit s_P ……

Př. 3: Traktor a auto vyjedou současně proti sobě po přímé silnici. Počáteční vzdálenost obou vozidel je 15 km, obě vozidla jedou stálou rychlostí. Rychlost traktoru je 36 km/h, rychlost auta je 20 m/s. Za jakou dobu a kde se obě vozidla potkají?

$v_t = 10\,\mathrm{m/s}$ $\quad$ $v_a = 20\,\mathrm{m/s}$ $\quad$ $t = ?$ $\quad$ $s = 15\,\mathrm{km} = 15000\,\mathrm{m}$

Ve chvíli, kdy se obě vozidla potkají, urazí dohromady od počátečního okamžiku vzdálenosti 15 km (jejich počáteční vzdálenost) $\Rightarrow$ $s = s_t + s_a$.

$$s = v_t t + v_a t$$

$$s = \left(v_t + v_a\right)t$$

$t=\frac{s}{v_t+v_a}=\frac{15000}{10+20}\,\mathrm{s}=500\,\mathrm{s}$

$s_t=v_t t=10\cdot 500\,\mathrm{m}=5000\,\mathrm{m}$

Vozidla se potkají za 500 sekund (8,3 minuty) ve vzdálenosti 5 km od místa, ze kterého vyjížděl traktor.

Př. 4: a) Osobní automobil předjíždí v obci rychlostí 50 km/h traktor pomalu jedoucí rychlostí 30 km/h. Jakou vzdálenost ujede od okamžiku, kdy začne předjíždět, do chvíle, kdy se bezpečně zařadí před traktor, jestliže traktor s valníkem je dlouhý 12 m a auto musí začít předjíždět 10 m před koncem traktoru a zařadit se 10 m před něj. Nejdříve odvoď obecný vzorec a pak s jeho pomocí vyřeš i další zadání.
b) Osobní automobil porušuje předpisy a jede uvnitř obce rychlostí 60 km/h.
c) Osobní automobil jedoucí rychlostí 90 km/h předjíždí nákladní automobil o délce 16 m jedoucí rychlostí 75 km/h.
d) Osobní automobil jedoucí rychlostí 130 km/h předjíždí na dálnici nákladní automobil o délce 16 m jedoucí rychlostí 100 km/h. Protože přejíždění probíhá ve větší rychlosti, musí osobní automobil odbočovat už ve vzdálenosti 15 m a ve stejné vzdálenosti se i zařazovat před předjížděné vozidlo.
Do odvozeného vzorce dosazuj tak, aby si převáděl co nejmenší počet hodnot.

Předjíždějící vozidlo značíme indexem *r* (rychlejší), předjížděné vozidlo indexem *p* (pomalejší).
Během předjíždění ujede rychlejší automobil vzdálenost, která je o Δs (v bodě a) platí $\Delta s=10+12+10\,\mathrm{m}$) delší než vzdálenost, kterou ujede pomalejší vozidlo: $s_r=s_p+\Delta s$.

Dosadíme $s=vt$: $v_r t_r=v_p t_p+\Delta s$.

Předjíždění trvá pro oba automobily stejně dlouho: $t_r=t_p=t$: $v_r t=v_p t+\Delta s$.

V rovnici zbyla jediná neznámá - čas předjíždění t $\Rightarrow$ vyjádříme ho.

$v_r t-v_p t=\Delta s$

$t\left(v_r-v_p\right)=\Delta s$

$t=\frac{\Delta s}{v_r-v_p}$

Hledáme vzdálenost, kterou ujede rychlejší vozidlo: $s_r=v_r t=\frac{v_r\cdot\Delta s}{v_r-v_p}=\Delta s\cdot\frac{v_r}{v_r-v_p}$.

Zlomek obsahuje v čitateli i jmenovateli pouze rychlost $\Rightarrow$ hodnotou zlomku je bezrozměrná veličina $\Rightarrow$ pokud dosadíme všechny rychlosti ve stejné jednotce, násobky základních jednotek se vykrátí a výsledek získáme ve stejné jednotce, ve které jsme dosadili Δs.
a) Osobní automobil předjíždí v obci rychlostí 50 km/h traktor pomalu jedoucí rychlostí 30 km/h. Jakou vzdálenost ujede od okamžiku, kdy začne předjíždět, do chvíle, kdy se bezpečně zařadí před traktor, jestliže traktor s valníkem je dlouhý 12 m a auto musí začít předjíždět 10 m před koncem traktoru a zařadit se 10 m před něj.

$v_r=50\,\mathrm{km/h}$, $v_p=30\,\mathrm{km/h}$, $\Delta s=10+12+10\,\mathrm{m}=32\,\mathrm{m}$

$s_r=\Delta s\cdot\frac{v_r}{v_r-v_p}=32\cdot\frac{50}{50-30}\,\mathrm{m}=80\,\mathrm{m}$

b) Osobní automobil porušuje předpisy a jede uvnitř obce rychlostí 60 km/h.

$v_r=60\,\mathrm{km/h}$, $v_p=30\,\mathrm{km/h}$, $\Delta s=10+12+10\,\mathrm{m}=32\,\mathrm{m}$

$$s_r = \Delta s \cdot \frac{v_r}{v_r - v_p} = 32 \cdot \frac{60}{60-30}\,\mathrm{m} = 64\,\mathrm{m}$$

c) Osobní automobil jedoucí rychlostí 90 km/h předjíždí nákladní automobil o délce 16 m jedoucí rychlostí 75 km/h.

$v_r = 90\,\mathrm{km/h}$, $v_p = 75\,\mathrm{km/h}$, $\Delta s = 10 + 16 + 10\,\mathrm{m} = 36\,\mathrm{m}$

$$s_r = \Delta s \cdot \frac{v_r}{v_r - v_p} = 36 \cdot \frac{90}{90-75}\,\mathrm{m} = 216\,\mathrm{m}$$

d) Osobní automobil jedoucí rychlostí 130 km/h předjíždí na dálnici nákladní automobil o délce 16 m jedoucí rychlostí 100 km/h. Protože přejíždění probíhá ve větší rychlosti, musí osobní automobil odbočovat už ve vzdálenosti 15 m a ve stejné vzdálenosti se i zařazovat před předjížděné vozidlo.

$v_r = 130\,\mathrm{km/h}$, $v_p = 100\,\mathrm{km/h}$, $\Delta s = 15 + 16 + 15\,\mathrm{m} = 46\,\mathrm{m}$

$$s_r = \Delta s \cdot \frac{v_r}{v_r - v_p} = 46 \cdot \frac{130}{130-100}\,\mathrm{m} = 199\,\mathrm{m}$$

Př. 5: Romeo a Julie jeli na kolech na společný výlet. Po 5 km Romeo zjistil, že si doma zapomněl mobil. Zrychlil na 20 km/h a začal se pro něj vracet, zatímco Julie zvolnila na 10 km/h a pokračovala v původním směru. Za jak dlouho a kde ji Romeo dohonil, když se doma jenom otočil a hned se vydal stejnou rychlostí 20 km/h za Julií?

$v_R = 20\,\mathrm{km/h}$, $v_J = 10\,\mathrm{km/h}$, $s_d = 5\,\mathrm{km}$, $t = ?$

Ve chvíli, kdy Romeo Julii dožene, budou oba stejnou dobu na cestě. Romeo však urazí větší vzdálenost.

$t_R = t_J$

$\frac{s_R}{v_R} = \frac{s_J}{v_J}$ Romeo kvůli vracení ujede o 10 km více $\Rightarrow$ $s_R = s_J + 10$

$\frac{s_J + 10}{v_R} = \frac{s_J}{v_J}$ $/ \cdot v_R v_J$

$v_J (s_J + 10) = v_R \cdot s_J$

$v_J s_J + 10 v_J = v_R \cdot s_J$

$10 v_J = v_R s_J - v_J s_J$

$10 v_J = (v_R - v_J) s_J$

$$s_J = \frac{10 v_J}{v_R - v_J} = \frac{10 \cdot 10}{20 - 10}\,\mathrm{km} = 10\,\mathrm{km}$$

$$t_J = \frac{s_J}{v_J} = \frac{10}{10}\,\mathrm{h} = 1\,\mathrm{h}$$

Romeo dožene Julii po 1 hodině ve vzdálenosti 10 km od místa, kde se rozdělili.

Pedagogická poznámka: Další příklady (více matematické) můžete nalézt v hodině 020513 Slovní úlohy o pohybu v učebnici matematiky.

Shrnutí: Pokud řešíme příklad sestavením rovnice, vycházíme z rovnosti dvou veličin.